

Corrigé Exercice 1

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et de probabilité $0,01$.

$$2. P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^6 = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \\ \approx 0,0026 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$3. P(X = 0) = 0,99^8 \approx 0,9227 \text{ et}$$

$$P(X = 1) = 8 \times 0,01 \times 0,99^7 \approx 0,0746.$$

Donc $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0,0001$,
ce qui semble négligeable.

Partie B

1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|R - 1| \geq 0,6) \leq \frac{0,09}{0,6^2}, \text{ donc } P(|R - 1| > 0,6) \leq 0,25.$$

$$2. P(|R - 1| \geq 0,6) = P(R \geq 1,6) + P(R \leq 0,4) = 2P(R \leq 0,4),$$

$$\text{donc } P(R \leq 0,4) = \frac{P(|R - 1| \geq 0,6)}{2}.$$

Or $P(|R - 1| \geq 0,6) \leq 0,25$, donc $P(R \leq 0,4) \leq 0,125$.

Corrigé Exercice 2

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n »;

M_n : « l'individu est malade en semaine n »;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 ; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :

Solution :

L'énoncé donne :

$$P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$$

$$P_{S_n}(M_{n+1}) = 0,05$$

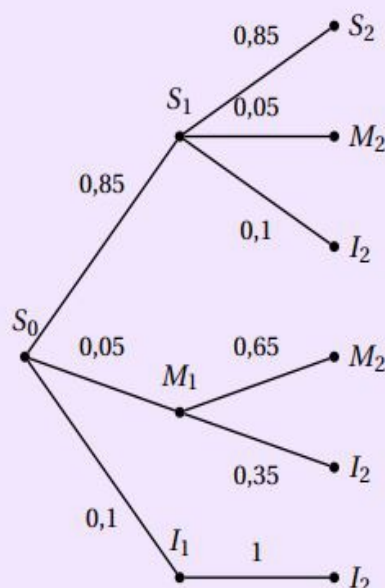
$$P_{S_n}(I_{n+1}) = 0,1$$

$$P_{M_n}(S_{n+1}) = 0,85$$

$$P_{M_n}(M_{n+1}) = 0,65$$

$$P_{M_n}(I_{n+1}) = 0,35$$

$$P_{I_n}(I_{n+1}) = 1$$



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.

Solution : S_1 , M_1 et I_1 forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
 P(I_2) &= P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap I_1) \\
 &= P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1) \\
 &= 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1 \\
 &= 0,2025
 \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millièmes, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Solution : On cherche $P_{I_2}(M_1)$

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{P_{M_1}(I_2) \times P(M_1)}{0,2025} = \frac{0,0175}{0,2025} = \frac{7}{81} \approx 0,0864$$

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0,65v_n + 0,05u_n$.

Solution : S_n , M_n et I_n forment une partition de l'univers puisque qu'un individu est soit de type S soit malade soit immunisé à l'exclusion de toute autre possibilité donc $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$
on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de cacu reproduite ci-dessus.

- a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

Solution : en C3 on a entré « =0,65*C2+0,05B2 »

car $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$

- b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

Solution : D'après le tableur, le « pic épidémique » est atteint lors de la 4^e semaine

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Solution : $u_{n+1} = P(S_{n+1})$ or la seule façon d'être de type S à la semaine $(n+1)$ est de l'avoir été à la semaine n donc $P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1}) \times P(S_n)$

or $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ d'après l'énoncé et $P(S_n) = u_n$

Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,85u_n$

On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$

on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0,85^n$

- b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n).$$

Solution :

initialisation : pour $n = 0$

$$v_0 = P(M_0) = 0 \text{ et } \frac{1}{4} (0,85^0 - 0,65^0) = 0$$

hérédité : Soit n un entier naturel tel que $v_n = \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n)$ alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,65v_n + 0,05u_n \\ &= 0,65 \times \left(\frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n) \right) + 0,05 \times 0,85^n \\ &= \left(0,65 \times \frac{1}{4} + 0,05 \right) \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \left(0,65 \times \frac{1}{4} + 0,2 \times \frac{1}{4} \right) \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \times 0,85^{n+1} - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \times (0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n)$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?

Solution : $|0,85| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ et de même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,65^n = 0$

On en déduit, par opération sur les limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

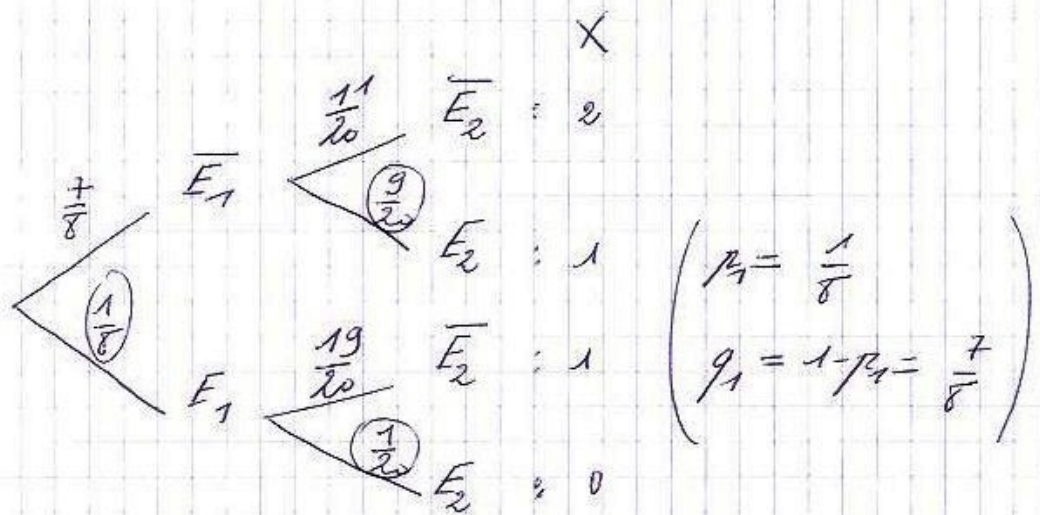
de plus on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n + w_n = 1$

on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

Cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée

Corrigé Exercice 3

1a



Les poids (probabilités) entourés sont donnés dans l'énoncé ; les autres sont déduits avec la loi des noeuds.

1b L'ensemble V des valeurs de la v.a. X est

$$V = \{0, 1, 2\}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X est la loi g sur V définie par

$$g(v) = p(X=v)$$

• $(X=0)$ est l'événement " E_1 et E_2 "

$$\begin{aligned} g(0) &= p(X=0) = p(E_1 \text{ et } E_2) = p(E_1) \times p(E_2) \\ &= \frac{7}{8} \times \frac{19}{20} = \frac{133}{160} \end{aligned}$$

• $(X=1)$ est l'événement $(\bar{E}_1 \text{ et } E_2)$ ou $(E_1 \text{ et } \bar{E}_2)$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} g(1) &= p(X=1) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{20} \\ &= \frac{7}{160} + \frac{9}{160} = \frac{16}{160} \end{aligned}$$

• $(X=2)$ est l'événement $\bar{E}_1 \text{ et } \bar{E}_2$

$$g(2) = p(X=2) = \frac{1}{8} \times \frac{11}{20} = \frac{11}{160}$$

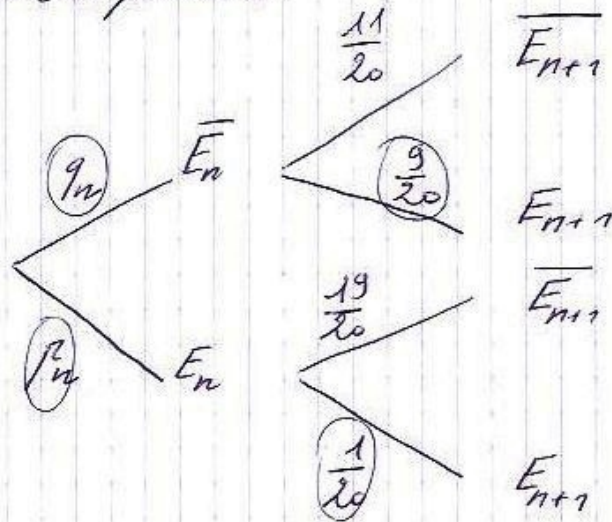
En résumé:

v	0	1	2
$p(X=v)$	$\frac{133}{160}$	$\frac{16}{160}$	$\frac{11}{160}$

1.c

$$\begin{aligned} E(X) = E(g) &= g(0) \times 0 + g(1) \times 1 + g(2) \times 2 \\ &= 0 + \frac{12}{160} + \frac{154}{160} \\ &= \frac{166}{160} = 1,0375 \end{aligned}$$

2. On a l'arbre pondéré:



2a D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(E_{n+1}) \\ &= q_n \times \frac{9}{20} + p_n \times \frac{1}{20} \end{aligned}$$

2b Sachant 2a) et $q_n = p(\bar{E}_n) = 1 - p(E_n) = 1 - p_n$, on obtient,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{9}{20}(1 - p_n) + \frac{1}{20}p_n \\ &= \frac{9}{20} - \frac{9}{20}p_n + \frac{1}{20}p_n = -\frac{8}{20}p_n + \frac{9}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{3a} \quad u_{n+1} &= 28p_{n+1} - 9 = 28\left(-\frac{8}{20}p_n + \frac{9}{20}\right) - 9 \\ &= -28 \times \frac{2p_n}{5} + 28 \times \frac{9}{20} - 9 \\ &= -\frac{56}{5}p_n + \frac{7 \times 9}{5} - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{soit } \left\{ \begin{aligned} \mu_{n+1} &= -\frac{56}{5} p_n + \frac{18}{5} = -\frac{56}{5} \left(\frac{\mu_n + 9}{28} \right) + \frac{18}{5} \\ &= -\frac{56}{5} \times \frac{\mu_n}{28} - \frac{56}{5} \times \frac{9}{28} + \frac{18}{5} \\ &= -\frac{2}{5} \mu_n - \frac{18}{5} + \frac{18}{5} \\ &= \boxed{-\frac{2}{5} \mu_n} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

La suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est donc géométrique de raison $-\frac{2}{5}$

3b. D'après 3a), $\mu_n = \mu_1 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

avec $\mu_1 = 28p_1 - 9 = 28 \times \frac{1}{8} - 9 = \frac{7}{2} - 9 = -\frac{11}{2}$

Ainsi $\mu_n = -\frac{11}{2} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

soit $28p_n - 9 = -\frac{11}{2} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

$$p_n = \frac{1}{28} \left[9 - \frac{11}{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} \right]$$

Sachant $-\frac{2}{5} \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{28} \times 9 = \frac{9}{28}$$

Si on joue beaucoup de fois tricolours (n grand), la probabilité qu'il soit rouge (p_n) est proche de $\frac{9}{28} \approx$